МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ
для поступающих на третий курс

1. ④ Вычислить поверхностный интеграл первого рода

$$\iint\limits_S \frac{dS}{z^2+1}, \quad \text{где поверхность } S = \left\{ 1 \le z = \sqrt{x^2+y^2} \le 2 \right\}$$

2. ④ Вычислить поверхностный интеграл второго рода

$$\iint\limits_S \left(\sqrt{z}\,dx\,dy + x\,dy\,dz\right), \quad \text{где поверхность } S = \left\{ z = x^2+y^2 \le 1 \right\}$$

ориентирована полем нормалей, имеющих тупой угол с осью z.

3. ④ Линейное преобразование φ трёхмерного евклидова пространства E в некотором ортонормированном базисе имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти в E ортонормированный базис из собственных векторов преобразования φ. Найти ортонормированные базисы в $\operatorname{Ker}\varphi$ и $\operatorname{Im}\varphi$.

4. ④ Найти экстремали и исследовать на экстремум функционал

$$J(y) = \int\limits_1^2 \frac{2y(x) - \big(y'(x)\big)^2}{x}\,dx \qquad y(2) = 1.$$

5. ④ Вычислить расстояние между параболоидом P и плоскостью $\varPi$, где

$$P = \left\{ z = (x-1)^2 + y^2 \right\}, \quad \varPi = \left\{ x + y - z = 2 \right\}.$$

Система координат декартова прямоугольная.

6. ⑤ В пространстве $CL_2[0,1]$ для любого $N \in \mathbb{N}$ найти ортогональную проекцию функции $f(x) = x$ на подпространство $L_N = \operatorname{Lin}\left\{ \sin(\pi n x) : n \in \overline{1,N} \right\}$ и вычислить расстояние ρ_N от f до L_N. Вычислить предел

$$\lim_{N\to\infty} \left(\sqrt{N}\rho_N\right).$$

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ

для поступающих на четвёртый курс

1. ④ В евклидовом постранстве $CL_2[0,1]$ найти ортогональную проекцию функции $f(x) = x$ на подпространство $L = \operatorname{Lin}\left\{\, 1,\ x^2 \,\right\}$. Найти ортогональный базис в подпространстве L.

2. ⑤ Пусть $\vec{n}$ — поле внешних единичных нормалей к границе ∂G области $G = \left\{\, x^2 + y^2 < 1 < x + y \,\right\}$. Для функции $u(x,y) = x^3 + y^3$ вычислить

$$\oint\limits_{\partial G} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\, ds, \quad \text{где контур } \partial G \text{ ориентирован против часовой стрелки.}$$

3. ⑤ Вычислить поверхностный интеграл второго рода

$$\iint\limits_{S} \frac{dx\, dy}{1 + z^4}, \quad \text{где поверхность } S = \left\{\, x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0 \,\right\}$$

ориентирована полем нормалей, имеющим острый угол с осью z.

4. ⑤ Вычислить

$$\oint\limits_{|z| = \frac{1}{4}} \frac{z^2\, dz}{1 + \exp\left(\frac{1}{z}\right)},$$

контур интегрирования ориентирован против часовой стрелки.

5. ⑥ Решить задачу Коши

$$u_{tt} = \Delta u + xyz^2, \qquad t > 0,$$

$$u\Big|_{t=0} = \cos(x+y),$$

$$u_t\Big|_{t=0} = \frac{z}{1+z^2}.$$

ОТВЕТЫ

для поступающих на третий курс

1. ④ Вычислить поверхностный интеграл первого рода

$$\iint\limits_S \frac{dS}{z^2+1}, \quad \text{где поверхность } S = \left\{ \ 1 \le z = \sqrt{x^2+y^2} \le 2 \ \right\}$$

Ответ: $\iint\limits_{1\le x^2+y^2\le 4} \frac{\sqrt{2}\,dx\,dy}{x^2+y^2+1} = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_1^2 \frac{\sqrt{2}r\,dr}{r^2+1} = \pi\sqrt{2}\ln\frac{5}{2}$.

Инструкция: поверхностный интеграл записан в виде повторного интеграла в терминах какой-либо параметризации поверхности — 2 очка.

2. ④ Вычислить поверхностный интеграл второго рода

$$\iint\limits_S \left(\sqrt{z}\,dx\,dy + x\,dy\,dz\right), \quad \text{где поверхность } S = \left\{ \ z = x^2+y^2 \le 1 \ \right\}$$

ориентирована полем нормалей, имеющих тупой угол с осью z.

Ответ: $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \left(-\sqrt{x^2+y^2}+2x^2\right) dx\,dy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r\,dr \ \left(-r+2r^2\cos^2\varphi\right) =$
$= -\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{6}$.

Инструкция: поверхностный интеграл записан в виде повторного интеграла в терминах какой-либо параметризации поверхности — 2 очка.

3. ④ Линейное преобразование φ трёхмерного евклидова пространства E в некотором ортонормированном базисе имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти в E ортонормированный базис из собственных векторов преобразования φ. Найти ортонормированные базисы в $\operatorname{Ker}\varphi$ и $\operatorname{Im}\varphi$.

Ответ: $\det(A-\lambda I) = -\lambda^3 + 11\lambda^2 - 18\lambda = -\lambda(\lambda-2)(\lambda-9)$.

Собственные числа и векторы:

$$\lambda_1 = 0,\ \mathbf{g}_1 = (1,-2,-1)^{\text{т}}, \quad \lambda_2 = 2,\ \mathbf{g}_2 = (1,2,-3)^{\text{т}}, \quad \lambda_3 = 9,\ \mathbf{g}_3 = (4,1,2)^{\text{т}}.$$

ОНБ: в E — $\left\{ \frac{\mathbf{g}_1}{\sqrt{6}}, \frac{\mathbf{g}_2}{\sqrt{14}}, \frac{\mathbf{g}_3}{\sqrt{21}} \right\}$, в $\operatorname{Ker}\varphi$ — $\left\{ \frac{\mathbf{g}_1}{\sqrt{6}} \right\}$, в $\operatorname{Im}\varphi$ — $\left\{ \frac{\mathbf{g}_2}{\sqrt{14}}, \frac{\mathbf{g}_3}{\sqrt{21}} \right\}$.

Инструкция: найден характеристический многочлен — 1 очко, найдены собственные числа — 1 очко, найдены собственные векторы — 1 очко.

4. ④ Найти экстремали и исследовать на экстремум функционал

$$J(y) = \int\limits_1^2 \frac{2y(x) - \big(y'(x)\big)^2}{x}\,dx \qquad y(2) = 1.$$

Ответ: $\hat{y}(x) = \ln 4 + \frac{x^2}{4}\left(1 - \ln x^2\right)$ — максимум.

Уравнение Эйлера $\frac{2}{x} + \frac{d}{dx}\frac{2y'(x)}{x} = 0$, тогда $\ln x + \frac{y'(x)}{x} = C$. Так как $y'(1) = 0$, то $C = 0$, и $y'(x) = -x\ln x$, откуда $y(x) = D + \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2}\ln x$. Так как $y(2) = 1$, то $D = 2\ln 2 = \ln 4$, откуда $\hat{y}(x) = \ln 4 + \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2}\ln x$ — допустимая экстремаль.

Для любой функци $h \in C^1[1,2]$ вида $h(2) = 0$ и $h \not\equiv 0$ имеем:

$$J\left(\hat{y} + h\right) - J\left(\hat{y}\right) = -\int\limits_1^2 \frac{\big(h'(x)\big)^2}{x}\,dx < 0,$$

то есть $\hat{y}$ — максимум.

Инструкция: найдена допустимая экстремаль — 2 очка. Проведено исследование на экстремум — 2 очка.

5. ④ Вычислить расстояние между параболоидом P и плоскостью $\mathit{\Pi}$, где

$$P = \left\{ z = (x-1)^2 + y^2 \right\}, \quad \mathit{\Pi} = \left\{ x + y - z = 2 \right\}.$$

Система координат декартова прямоугольная.

Ответ: $\rho(P, \mathit{\Pi}) = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Пусть точка $(x, y, z) \in P$ ближайшая к $\mathit{\Pi}$. Вектор $(2(x-1), 2y, -1)$ является нормалью к касательной плоскости к P в точке (x, y, z). Тогда векторы $(2(x-1), 2y, -1)$ и $(1, 1, -1)$ параллельны, т. е. для некоторого $a \in \mathbb{R}$ выполнено $(2(x-1), 2y, -1) = a(1, 1, -1)$. Находим $a = 1$, $x = \frac{3}{2}$, $y = \frac{1}{2}$, $z = \frac{1}{2}$. Ближайшей к P точкой плоскости $\mathit{\Pi}$ является $(x, y, z) + t(1, 1, -1)$ для подходящего $t > 0$. При этом искомое расстояние равно $\rho = |t(1, 1, -1)| = t\sqrt{3}$. Имеем: $2 = x + t + y + t - z + t = \frac{3}{2} + 3t$, то есть $t = \frac{1}{6}$, и $\rho = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Инструкция: найдена точка в P, ближайшая к $\mathit{\Pi}$ — 2 очка.

6. ⑤ В пространстве $CL_2[0,1]$ для любого $N \in \mathbb{N}$ найти ортогональную проекцию функции $f(x) = x$ на подпространство $L_N = \mathrm{Lin}\left\{ \sin(\pi n x) : n \in \overline{1,N} \right\}$ и вычислить расстояние ρ_N от f до L_N. Вычислить предел

$$\lim_{N\to\infty} \left(\sqrt{N}\rho_N \right).$$

Ответ: $S_N(x) = \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{2(-1)^{n-1}}{\pi n} \sin(\pi n x)$, $\quad \rho_N = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sqrt{\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}}$, $\quad \sqrt{N}\rho_N \to \frac{\sqrt{2}}{\pi}$.

В силу минимального свойства коэффициентов Фурье, ортогональной проекцией функции f на подпространство L_N в $CL_2[0,1]$ является N-ая сумма Фурье f по ортогональной системе $\left\{ \sin(\pi n x) : n \in \mathbb{N} \right\}$, то есть функция

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \sin(\pi n x), \quad \text{где} \quad a_n = 2\int_0^1 x \sin(\pi n x)\, dx = \frac{2(-1)^{n-1}}{\pi n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

В силу равенства Парсеваля имеем:

$$\rho_N = \|f - S_n\|_2 = \sqrt{\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n|^2 \left\| \sin(\pi n x) \right\|_2^2} = \sqrt{\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sqrt{\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}}.$$

В силу очевидных соотношений

$$\frac{1}{N+1} = \int_{N+1}^{\infty} \frac{dt}{t^2} \le \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \le \int_{N}^{\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{N}$$

получаем, что

$$\frac{\sqrt{2}}{\pi}\sqrt{\frac{N}{N+1}} \le \sqrt{N}\rho_N \le \frac{\sqrt{2}}{\pi},$$

откуда по теореме о двух милиционерах следует равенство

$$\lim_{N\to\infty} \sqrt{N}\rho_N = \frac{\sqrt{2}}{\pi}.$$

Инструкция: ортогональная проекция — 2 очка, расстояние — 1 очко, предел — 2 очка.

Ответы

для поступающих на четвёртый курс

1. ④ В евклидовом пострaнстве $CL_2[0,1]$ найти ортогональную проекцию функции $f(x) = x$ на подпространство $L = \operatorname{Lin}\{\ 1,\ x^2\ \}$. Найти ортогональный базис в подпространстве L.

Ответ: проекция $g(x) = \frac{3}{16} + \frac{15}{16}x^2$, базис $\{\ 1,\ (1-3x^2)\ \}$.

Инструкция: проекция — 2 очка, базис — 2 очка .

2. ⑤ Пусть $\vec{n}$ — поле внешних единичных нормалей к границе ∂G области $G = \{\ x^2+y^2 < 1 < x+y\ \}$. Для функции $u(x,y) = x^3+y^3$ вычислить

$$\oint\limits_{\partial G} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\, ds, \quad \text{где контур } \partial G \text{ ориентирован против часовой стрелки.}$$

Ответ: По формуле Грина $\oint\limits_{\partial G} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\, ds = \iint\limits_G \Delta u(x,y)\, dx\, dy = \iint\limits_G 6(x+y)\, dx\, dy =$
$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^1 6r^2(\cos\varphi + \sin\varphi)\, dr - \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} 6(x+y)\, dy = 4-2 = 2.$

Решение по определению: $\nabla u = (3x^2, 3y^2)$, поэтому

при $x+y=1$ имеем $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,-1)$ и $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = -\frac{3}{\sqrt{2}}(x^2+y^2)$,

при $x^2+y^2=1$ имеем $\vec{n} = (x,y)$ и $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 3(x^3+y^3)$.

Обозначим

$$\partial G_1 = \left\{\ x^2+y^2 < 1 = x+y\ \right\}, \quad \partial G_2 = \left\{\ x^2+y^2 = 1 < x+y\ \right\},$$

тогда

$$\oint\limits_{\partial G} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\, ds = \int\limits_{\partial G_1} \left(-\tfrac{3}{\sqrt{2}}\right)\left(x^2+y^2\right)\, ds + \int\limits_{\partial G_2} 3\left(x^3+y^3\right)\, ds =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(-\tfrac{3}{\sqrt{2}}\right)\left(x^2+(1-x)^2\right)\sqrt{2}\, dx + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 3\left(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi\right)\, d\varphi =$$

$$= -3\left(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{3}\right) + 6\int\limits_0^1 \left(1-t^2\right)\, dt = -2 + 6\left(1-\tfrac{1}{3}\right) = -2+4 = 2.$$

Инструкция: применена формула Грина — 2 очка. Решение по определению: по 1 очку за производную по нормали на гладком куске границы.

3. (5) Вычислить поверхностный интеграл второго рода

$$\iint\limits_S \frac{dx\,dy}{1+z^4}, \quad \text{где поверхность } S = \left\{\ x^2+y^2+z^2=1,\ z \geq 0\ \right\}$$

ориентирована полем нормалей, имеющим острый угол с осью z.

Ответ: $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta\,\sin\theta\,d\theta}{1+\cos^4\theta} = 2\pi\int\limits_0^1 \frac{t\,dt}{1+t^4} = \frac{\pi^2}{4}$.

Инструкция: поверхностный интеграл записан в виде повторного интеграла в терминах какой-либо параметризации поверхности — 2 очка.

4. (5) Вычислить

$$\oint\limits_{|z|=\frac{1}{4}} \frac{z^2\,dz}{1+\exp\left(\frac{1}{z}\right)},$$

контур интегрирования ориентирован против часовой стрелки.

Ответ: $2\pi i\left(\dfrac{1}{48} - \dfrac{2}{\pi^4}\right)$.

Обозначим $f(z) = \frac{z^2}{1+\exp\left(\frac{1}{z}\right)}$, тогда $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{4}} f(z)\,dz = -2\pi i\left(\operatorname*{res}\limits_{\frac{1}{\pi i}} f + \operatorname*{res}\limits_{-\frac{1}{\pi i}} f + \operatorname*{res}\limits_{\infty} f\right)$.

$$\operatorname*{res}\limits_{\frac{1}{\pi i}} f = -\frac{z^4}{\exp\left(\frac{1}{z}\right)}\Bigg|_{z=\frac{1}{\pi i}} = \frac{1}{\pi^4}, \quad \operatorname*{res}\limits_{-\frac{1}{\pi i}} f = -\frac{z^4}{\exp\left(\frac{1}{z}\right)}\Bigg|_{z=-\frac{1}{\pi i}} = \frac{1}{\pi^4},$$

$$f(z) = \frac{z^2}{2}\left(1+\frac{1}{2z}+\frac{1}{4z^2}+\frac{1}{12z^3}+\ldots\right)^{-1} = \frac{1}{2z}\left(-\frac{1}{12}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)+\ldots = \frac{1}{48z}+\ldots,$$

откуда $\operatorname*{res}\limits_{\infty} f = -\frac{1}{48}$.

Инструкция: интеграл записан через вычеты — 1 очко, за вычет в конечной точке — 1 очко, за вычет на бесконечности — 2 очка.

5. (6) Решить задачу Коши

$$u_{tt} = \Delta u + xyz^2, \qquad t > 0,$$

$$u\,\Big|_{t=0} = \cos(x+y),$$

$$u_t\Big|_{t=0} = \frac{z}{1+z^2}.$$

Ответ: $u = txyz^2 + \frac{t^3}{3}xy + \cos\left(\sqrt{2}t\right)\cos(x+y) + \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1+(z+t)^2}{1+(z-t)^2}\right).$

$u = a(t)xyz^2 + b(t)xy + c(t)\cos(x+y) + \frac{1}{2}\int\limits_{z-t}^{z+t}\frac{\xi\,d\xi}{1+\xi^2}$, где

$$\ddot{a}(t) = 0, \quad \ddot{b}(t) = 2a(t), \quad a(0) = \dot{a}(0) = b(0) = \dot{b}(0) = 0,$$

$$\ddot{c}(t) = -2c(t) \quad c(0) = 1, \quad \dot{c}(0) = 0,$$

$$\Downarrow$$

$$a(t) = t, \quad b(t) = \frac{t^3}{3}, \quad c(t) = \cos\left(\sqrt{2}t\right).$$

Инструкция: по 2 очка за

- решение неоднородного уравнения с однородными начальными условиями,

- решение однородного уравнения с нетривиальным первым начальным условием и тривиальным вторым,

- решение однородного уравнения с тривиальным первым начальным условием и нетривиальным вторым.

ОЧКИ	**ОЦЕНКА**
0–1	НЕУД. (1)
2–3	НЕУД. (2)
4–5	УДОВЛ. (3)
6–7	УДОВЛ. (4)
8–10	ХОР. (5)
11–13	ХОР. (6)
14–16	ХОР. (7)
17–19	ОТЛ. (8)
20–22	ОТЛ. (9)
23–25	ОТЛ. (10)